

Каждая правильно решенная задача оценивается в 10 баллов.

### Физика 8 класс, вариант 2

1. Машина проехала из пункта А в пункт В и обратно. Весь путь из А в В и половину обратного пути машина ехала с постоянной скоростью, а затем из-за поломки снизила скорость и проехала остаток обратного пути с постоянной, но меньшей скоростью. Во сколько раз машина снизила скорость, если известно, что её средняя скорость на пути из А в В была втрое больше, чем на обратном пути?

**Решение.**

Введём обозначения:  $v$  — скорость исправного автомобиля,  $u$  — скорость автомобиля после поломки,  $S$  — путь из пункта А в пункт В. Средняя скорость равна отношению длины пути ко времени движения. Поскольку путь из А в В машина проехала с постоянной скоростью  $v$ , то средняя скорость движения на этом участке тоже равна  $v$ . Учитывая, что, по условию, средняя скорость на пути из А в В была втрое больше средней скорости на обратном пути, запишем:

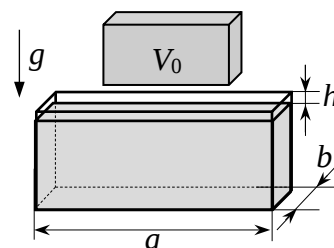
$$v = 3 \cdot \frac{S}{\underbrace{\frac{S}{2}}_v + \underbrace{\frac{S}{2}}_u} . \quad (8 \text{ б.})$$

время движения до поломки                      время движения после поломки

Выразив отсюда искомое отношение скоростей, получим

$$\text{ответ: } \frac{v}{u} = 5. \quad (2 \text{ б.})$$

2. Прямоугольный аквариум с размерами прямоугольного дна  $a \times b$ , наполнен водой плотностью  $\rho_0$ . Уровень воды на высоту  $h$  ниже края аквариума. Какой объём воды выльется из аквариума, если опустить в него деревянный брусок плотностью  $\rho$  и объёмом  $V_0$ ? Брусок после погружения плавает в воде.



**Решение.**

Поскольку брусок плавает в воде, то сила тяжести, действующая на брусок, уравнивается выталкивающей силой Архимеда:

$$\underbrace{\rho V_0 g}_{\text{масса бруска}} = \rho_0 V_{\text{погр}} g , \quad (1) \quad (5 \text{ б.})$$

где  $g$  — ускорение свободного падения,  $V_{\text{погр}}$  — объём вытесненной воды, равный объёму части бруска, погруженной в воду.

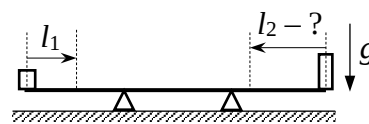
Часть вытесненной воды заполнит пустой объём аквариума  $abh$ , а остальная вода выльется.

$$V = V_{\text{погр}} - abh . \quad (3 \text{ б.})$$

Подставив сюда  $V_{\text{погр}}$  из (1), найдём

$$\text{ответ: } V = \frac{\rho}{\rho_0} V_0 - abh . \quad (2 \text{ б.})$$

3. Лёгкая линейка длиной  $l$  лежит на двух опорах так, что они поделили её на три равные части. На противоположных концах линейки лежат по одному грузу разной массы. Конструкция находится в равновесии. Левый груз начали аккуратно двигать вправо так, что линейка оставалась неподвижной. Когда груз был сдвинут на  $l_1$ , конструкция потеряла равновесие и разрушилась. Конструкцию восстановили в её начальном виде и повторили эксперимент, только теперь стали двигать правый груз влево. На какое максимальное расстояние можно сдвинуть груз до того, как разрушится конструкция?



### Решение.

В начальном положении вес грузов распределён между двумя опорами. При перемещении левого груза вправо, вес на левую опору уменьшается, а на правую увеличивается. В момент, когда левый груз переместится на  $l_1$ , линейка с грузами всем весом опирается на правую опору, тогда как сила давления на левую опору равна нулю. При этом, по третьему закону Ньютона, сила реакции опоры, действующая на линейку со стороны левой опоры, равна нулю и, следовательно, не создаёт дополнительного момента сил относительно правой опоры. Запишем условие равновесия грузов относительно правой опоры:

$$m_1 g \cdot \left( \frac{2}{3} l - l_1 \right) = m_2 g \cdot \frac{1}{3} l. \quad (1) \quad (4 \text{ б.})$$

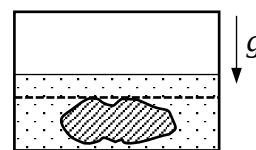
Рассуждая аналогично про перемещение правого груза, можно записать:

$$m_1 g \cdot \frac{1}{3} l = m_2 g \cdot \left( \frac{2}{3} l - l_2 \right). \quad (2) \quad (4 \text{ б.})$$

Разделив (1) на (2) и выразив искомую длину  $l_2$ , получим

$$\text{ответ: } l_2 = \frac{l - 2l_1}{2 - 3\frac{l_1}{l}}. \quad (2 \text{ б.})$$

4. В прямоугольном теплоизолированном сосуде, дно которого имеет форму квадрата со стороной 10 см, находятся в тепловом равновесии лёд и вода. Надо льдом закреплена сетка, препятствующая его всплыванию. В сосуд налили 0,9 л горячей воды, имеющей температуру  $80^\circ\text{C}$ , так что она полностью покрывает лёд. Насколько изменится уровень воды в сосуде, после того как наступит тепловое равновесие, если известно, что при этом растает часть льда? Теплоёмкость воды —  $4,2 \text{ кДж/кг}\cdot\text{K}$ , её плотность —  $1000 \text{ кг/м}^3$ , теплота плавления льда —  $336 \text{ кДж/кг}$ , его плотность —  $900 \text{ кг/м}^3$ .



### Решение.

Поскольку вначале вода и лёд в сосуде находятся в тепловом равновесии, их температура равна температуре плавления льда  $T_0 = 0^\circ\text{C}$ . (1 б.)

Поскольку после добавления горячей воды, растает только часть льда, конечная температура воды в сосуде также равна  $T_0 = 0^\circ\text{C}$ . (1 б.)

Массу растаявшего льда  $\Delta m$  можно выразить из уравнения теплового баланса — часть льда массой  $\Delta m$  расплавится за счёт остывания добавленной в сосуд горячей воды массой  $\rho V$ :

$$\lambda \Delta m = c \rho V (T - T_0), \quad (1) \quad (2 \text{ б.})$$

где  $\lambda$  — удельная теплота плавления льда,  $c$  — удельная теплоёмкость воды,  $T$  — температура горячей воды,  $V$  — объём горячей воды,  $\rho$  — плотность воды.

После таяния льда объём, занимаемый водой со льдом, изменится на

$$\Delta V = \frac{\Delta m}{\rho} - \frac{\Delta m}{\rho_{\text{л}}}, \quad (2) \quad (1 \text{ б.})$$

а уровень воды в сосуде изменится на

$$\Delta h = \frac{\Delta V}{a^2}. \quad (1 \text{ б.})$$

Подставив сюда  $\Delta V$  из (2), а затем  $\Delta m$  из (1), найдём

$$\Delta h = -\frac{V}{a^2} \frac{c\rho}{\lambda} (T - T_0) \left( \frac{1}{\rho_{\text{л}}} - \frac{1}{\rho} \right). \quad (2 \text{ б.})$$

Подставив сюда численные значения, получим

$$\text{ответ: уровень воды уменьшится на 1 см.} \quad (2 \text{ б.})$$

### Физика 9 класс, вариант 2

1. Иван Царевич отправился в путь за путеводным клубком, подаренным ему Бабой Ягой. Первую треть пути, пролежавшему по полю, клубок катился с постоянной скоростью 5 км/ч, а затем углубился в лес, где его скорость упала вдвое. Иван Царевич шёл с непостоянной скоростью вдоль разматывающейся нити по траектории клубка, стараясь не отставать от него. Чему равна средняя скорость Ивана Царевича на всём пути, если в начале пути он находился рядом с клубком, а конечной точки они достигли одновременно?

**Решение.**

Пусть  $l$  — длина всего пути, который прокатился клубок, а  $u$  — его скорость на первой трети пути. Тогда на остальных двух третях пути его скорость  $u/2$ , по условию. Время, затраченное клубком на прохождение всего пути,

$$t = \frac{l/3}{u} + \frac{2l/3}{u/2} = \frac{5l}{3u}. \quad (4 \text{ б.})$$

Среднюю скорость клубка можно найти, поделив весь путь на всё время:

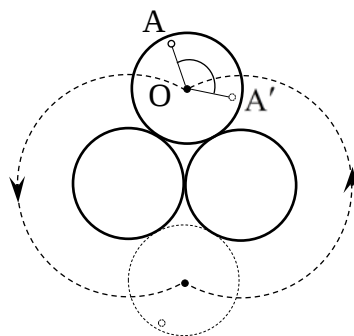
$$u_{\text{клубка}} = \frac{l}{t} = \frac{3}{5}u. \quad (2 \text{ б.})$$

Так как Иван Царевич прошёл тот же путь, что и клубок, и затратил на него то же время, то средняя скорость Ивана Царевича равняется средней скорости клубка. (2 б.)

Подставляя численное значение для скорости клубка, получим

$$\text{ответ: средняя скорость Ивана Царевича на всём пути равна 3 км/ч.} \quad (2 \text{ б.})$$

2. На столе лежат три одинаковые монеты. Одну из монет, возле края которой проделано отверстие в точке  $A$  (см. рис.), катят без проскальзывания вокруг двух других, плотно прижатых друг к другу закреплённых монет. После того как центр монеты вернулся в исходную точку  $O$ , отверстие заняло положение  $A'$ . Найти угол  $\angle AOA'$ .



**Решение.**

Будем катить одну монету вокруг закреплённой другой так, чтобы угловая скорость вращения  $\omega$  монеты вокруг собственной оси была постоянной. Так как монета катится без проскальзывания, то линейная скорость её центра относительно неподвижной монеты, будет равна  $u = \omega R$ , где  $R$  — её радиус. (2 б.)

Полная длина траектории центра монеты, представляющая собой сумму длин двух дуг, показанных на рисунке, равна  $l = (4\pi/3 + 4\pi/3) \cdot 2R$ . (4 б.)

За время прохождения всей траектории ( $l/u$ ), отверстие повернётся на угол

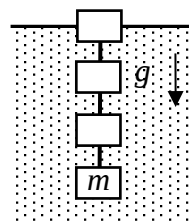
$$\alpha = \omega \frac{l}{u} = \frac{16}{3} \pi = 6\pi - \frac{2}{3} \pi. \quad (2 \text{ б.})$$

Вычитая угол  $6\pi$  (3 полных оборота), получим  $\alpha = -120^\circ$ , где знак минус означает, что угол нужно отсчитывать в направлении, противоположном вращению.

**Ответ:**  $\angle AOA' = 120^\circ$ . (2 б.)

*Примечание.* Решения, основанные на ошибочном предположении, что монета вращается вокруг своей оси с той же (а не удвоенной) угловой скоростью, что и её центр вокруг неподвижной монеты, оцениваются не более чем в 4 балла, несмотря на правильный ответ.

3. Четыре одинаковых лёгких контейнера связаны тонкими лёгкими тросами. В нижнем контейнере находится груз массы  $m$ , остальные пустые. Найдите силу натяжения верхнего троса. Верхний контейнер погружен в воду наполовину. Ускорение свободного падения  $g$ .



**Решение.**

Сила тяжести  $mg$ , действующая на всю систему, уравнивается суммой сил Архимеда, действующих на три полностью погруженных контейнера  $3F_A$  и один наполовину погруженный контейнер  $0,5 F_A$ :

$$mg = 3,5 F_A. \quad (1) \quad (4 \text{ б.})$$

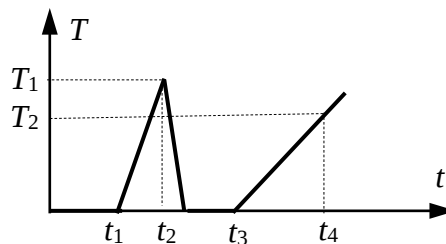
На верхний контейнер действует сила натяжения троса  $T$ , а также сила Архимеда  $0,5 F_A$ . Поскольку контейнер находится в равновесии, эти силы равны:

$$T = 0,5 F_A. \quad (2) \quad (4 \text{ б.})$$

Разделив (2) на (1) и выразив  $T$ , получим

$$\text{ответ: } T = \frac{mg}{7}. \quad (2 \text{ б.})$$

4. В колбе над газовой горелкой греют воду со льдом. В некоторый момент времени из морозильника достают новую порцию льда, бросают в колбу и продолжают нагревать. На протяжении всего эксперимента измеряют температуру в колбе. График зависимости температуры от времени приведён на рисунке. Величины  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$ ,  $t_4$  измерены и известны. Определить, какой была температура в морозильнике, где находился лёд. Скорость подвода тепла к колбе считать постоянной. Удельная теплоёмкость воды  $c_1$ , льда —  $c_2$ , теплота плавления льда  $\lambda$ .



**Решение.**

Пусть масса воды со льдом, первоначально находившаяся в колбе, равна  $M$ . В момент времени  $t_1$  лёд растаял, поэтому температура начала расти. Нагреву воды массы  $M$  на первом наклонном участке графика соответствует уравнение:

$$P(t_2 - t_1) = c_1 M (T_1 - T_0), \quad (1) \quad (2 \text{ б.})$$

где  $P$  — мощность тепла, подводимая к колбе, а  $T_0 = 0^\circ\text{C}$  — температура плавления льда.

Из графика видно, что после момента времени  $t_2$  температура начала понижаться, значит именно в этот момент бросили порцию льда. Всё тепло, подведённое к колбе на участке от  $t_1$  до  $t_3$ , пошло на нагрев льда до нулевой температуры и на плавление этой порции льда:

$$P(t_3 - t_1) = c_2 m (T_0 - T) + \lambda m, \quad (2) \quad (4 \text{ б.})$$

где  $m$  — масса порции льда, а  $T$  — искомая температура.

На участке от  $t_3$  до  $t_4$  происходит нагрев всей образовавшейся воды:

$$P(t_4 - t_3) = c_1 (m + M) (T_2 - T_0). \quad (3) \quad (2 \text{ б.})$$

Разделив (1) на (2) и выразив отношение масс, получим

$$\frac{M}{m} = \frac{(t_2 - t_1) (c_2 (T_0 - T) + \lambda)}{(t_3 - t_1) c_1 (T_1 - T_0)}.$$

Разделив (3) на (1) и выразив из получившегося выражения искомую температуру, получим:

$$T = T_0 + \frac{\lambda}{c_2} - \frac{c_1}{c_2} \frac{(t_3 - t_1)(T_1 - T_0)(T_2 - T_0)}{(t_4 - t_3)(T_1 - T_0) - (t_2 - t_1)(T_2 - T_0)}.$$

Или, учитывая, что  $T_0 = 0^\circ\text{C}$ , запишем

$$\text{ответ: } T = \frac{\lambda}{c_2} - \frac{c_1}{c_2} \frac{(t_3 - t_1) T_1 T_2}{(t_4 - t_3) T_1 - (t_2 - t_1) T_2}. \quad (2 \text{ б.})$$

### Физика 10 класс, вариант 2

1. Мальчик Петя вышел из дома в школу и шёл с такой постоянной скоростью, что успевал прийти ровно к началу первого урока. Пройдя треть пути, он обнаружил, что забыл дома телефон. Во сколько раз Петя должен увеличить свою скорость по сравнению с первоначальной, чтобы вернуться за телефоном и вовремя успеть в школу?

**Решение.**

Пусть  $v_0$  — скорость мальчика вначале,  $v$  — после прохождения трети пути,  $l$  — расстояние от дома до школы. Тогда запланированное время в пути до школы равно

$$\frac{l}{v_0}, \quad (1) \quad (2 \text{ б.})$$

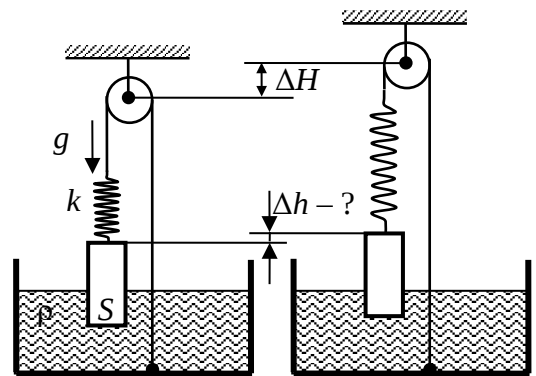
а фактическое —

$$\frac{l}{3v_0} + \frac{l}{3v} + \frac{l}{v}. \quad (2) \quad (6 \text{ б.})$$

Приравнявая (1) и (2), найдём

$$\text{ответ: } \frac{v}{v_0} = 2. \quad (2 \text{ б.})$$

2. К одному концу пружины прикреплен груз цилиндрической формы, а ко второму концу привязана нерастяжимая нить, которая перекинута через блок и закреплена на дне широкого сосуда так, что груз частично опущен в воду. Блок приподняли на высоту  $\Delta H$ . На какую высоту приподнимется груз? Плотность воды  $\rho$ , жёсткость пружины  $k$ , площадь основания цилиндрического груза  $S$ , ускорение свободного падения  $g$ . Плотность груза больше плотности воды.



**Решение.**

При поднятии блока пружина растянется на  $2\Delta H - \Delta h$ . (2 б.)

Следовательно, сила упругости пружины изменится на

$$\Delta F_{\text{упр}} = k(2\Delta H - \Delta h). \quad (1) \quad (3 \text{ б.})$$

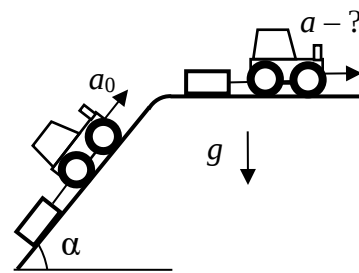
При этом сила Архимеда, действующая на груз в воде, изменится на

$$\Delta F_A = \rho S \Delta h g. \quad (2) \quad (3 \text{ б.})$$

Поскольку система остаётся в равновесии, эти изменения сил равны. Приравняв правые части (1) и (2), найдём

$$\text{ответ: } \Delta h = \frac{2\Delta H}{1 + \rho g S / k}. \quad (2 \text{ б.})$$

3. Трактор может тащить волоком груз, соединённый с ним тросом (трос параллелен дороге), в горку с углом наклона  $\alpha$  с максимальным ускорением  $a_0$ . С каким максимальным ускорением трактор может тащить этот груз по горизонтальному участку? Ускорение свободного падения  $g$ . Считать, что оба колеса у трактора ведущие. Коэффициенты трения колёс и груза о дорожное покрытие одинаковы на наклонном и горизонтальном участках. Влиянием воздуха пренебречь.



**Решение.** Очевидно, что максимальное ускорение получится при максимальной силе тяги трактора, которая не может превышать силу трения, действующую на его колеса. Поэтому, при движении по горизонтальному участку трактор развивает максимальную силу тяги:

$$F_T = \mu_1 m_1 g, \quad (1) \quad (2 \text{ б.})$$

где  $\mu_1$  — коэффициент трения колёс о дорожное покрытие,  $m_1$  — масса трактора. Эта формула остаётся справедливой и в случае, если сила реакции, действующая на передние и задние колёса, неодинакова, т.к. при одинаковом коэффициенте трения суммарная сила трения будет определяться суммарной силой реакции (на передние и задние колёса).

При движении по наклонному участку, сила тяги

$$F_{T0} = \mu_1 m_1 g \cos \alpha. \quad (2) \quad (2 \text{ б.})$$

Напишем уравнения движения системы «трактор + груз» на наклонном и горизонтальном участках:

$$F_{T0} - \mu_2 m_2 g \cos \alpha - (m_1 + m_2) g \sin \alpha = (m_1 + m_2) a_0, \quad (3) \quad (2 \text{ б.})$$

$$F_T - \mu_2 m_2 g = (m_1 + m_2) a, \quad (4) \quad (2 \text{ б.})$$

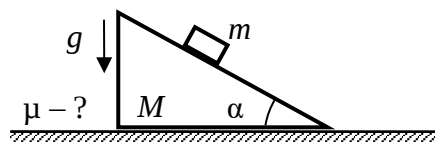
где  $\mu_2$  — коэффициент трения груза о дорожное покрытие,  $m_2$  — масса груза.

Из (1) и (2) следует:  $F_{T0} = F_T \cos \alpha$ . Подставив в это равенство  $F_{T0}$  из (3) и  $F_T$  из (4), найдём

$$\text{ответ: } a = \frac{a_0}{\cos \alpha} + g \tan \alpha. \quad (2 \text{ б.})$$

*Примечание.* Такой же ответ можно получить, используя одинаковые массы груза и трактора, что не следует из условия задачи. Такие частные решения оценивать не более чем в 8 баллов.

4. По клину массы  $M$ , стоящем на шероховатом полу, соскальзывает брусок массы  $m$ . Определите, при каком минимальном коэффициенте трения между столом и клином клин будет покоиться. Угол наклона клина  $\alpha$ . Трением между бруском и клином, а также влиянием воздуха пренебречь.



**Решение.**

Со стороны груза на клин перпендикулярно его наклонной поверхности действует сила реакции:

$$N_1 = mg \cos \alpha . \quad (1) \quad (2 \text{ б.})$$

Клин будет покоиться, если горизонтальная составляющая этой силы не будет превышать максимальную силу трения клина о горизонтальную поверхность:

$$N_1 \sin \alpha \leq F_{\text{тр}} = \mu N_2 , \quad (2) \quad (3 \text{ б.})$$

где  $N_2$  — сила реакции опоры, действующая на клин со стороны горизонтальной поверхности. Для нахождения  $N_2$  напишем равенство сил, действующих на клин в вертикальном направлении:

$$N_2 = Mg + N_1 \cos \alpha . \quad (3) \quad (3 \text{ б.})$$

Подставив (1) и (3) в (2), найдём

$$\mu \geq \frac{m \cos \alpha \sin \alpha}{m \cos^2 \alpha + M} .$$

Поэтому, для минимального значения коэффициента трения получим

$$\text{ответ: } \mu_{\min} = \frac{\cos \alpha \sin \alpha}{\frac{M}{m} + \cos^2 \alpha} . \quad (2 \text{ б.})$$

### Физика 11 класс, вариант 2

1. Мальчик стоял на берегу озера у самой воды и бросал камни в озеро под углом  $15^\circ$  к горизонту. Он заметил, что водяные круги достигают его ног через время  $T$  после падения камня. К мальчику подошёл отец и тоже бросил камень в озеро, но под углом  $45^\circ$  и с вдвое большей начальной скоростью, чем это делал мальчик. Через какое время после падения камня, который бросил отец, водяные круги достигнут его ног? Считать, что круги по воде распространяются с постоянной скоростью. Ростом мальчика и его отца, а также влиянием воздуха пренебречь.

#### Решение.

Камень, брошенный мальчиком со скоростью  $v$  под углом  $\alpha$  к горизонту, падает на расстоянии  $v^2 \sin 2\alpha / g$  от берега. Поскольку, водяные круги достигают берег за время  $T$ , скорость их распространения равна  $v^2 \sin 2\alpha / (gT)$ . Пусть отец бросил камень со скоростью  $v'$  под углом  $\alpha'$  к горизонту. Тогда, поскольку по условию задачи скорость распространения водяных кругов постоянна, приравнявая их выражения в случаях броска мальчика и его отца, получим

$$\frac{v^2 \sin 2\alpha}{gT} = \frac{v'^2 \sin 2\alpha'}{gT'} . \quad (8 \text{ б.})$$

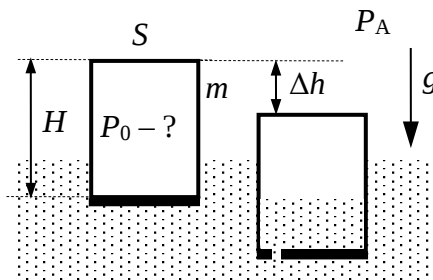
Здесь  $T'$  — искомое время. Отсюда

$$T' = T \left( \frac{v'}{v} \right)^2 \frac{\sin 2\alpha'}{\sin 2\alpha} .$$

Подставив сюда  $v'/v = 2$ ,  $\alpha = 15^\circ$ ,  $\alpha' = 45^\circ$ , получим

$$\text{ответ: } T' = 8T. \quad (2 \text{ б.})$$

2. Герметичный цилиндрический сосуд массы  $m$ , высоты  $H$  и сечением  $S$ , наполненный воздухом, плавает в вертикальном положении в жидкости. В нижней части сосуда возникла течь, в результате чего сосуд занял новое положение равновесия, опустившись на высоту  $\Delta h$ . Найти начальное давление воздуха в сосуде. Атмосферное давление  $P_A$ , ускорение свободного падения  $g$ . Температура постоянна.



**Решение.**

Запишем равенство силы тяжести и силы Архимеда, действующих на герметичный сосуд:

$$mg = \rho V_{\text{погр}} g, \quad (1 \text{ б.})$$

где  $V_{\text{погр}}$  — объём погруженной части сосуда.

Зная сечение контейнера, найдём высоту его погруженной части

$$h = \frac{m}{\rho S}. \quad (1) \quad (2 \text{ б.})$$

После того, как сосуд опустился, увеличилась действующая на него сила Архимеда, которая компенсировалась силой тяжести попавшей внутрь сосуда воды. Это означает, что объём воздуха в сосуде изменился на  $\Delta h S$ . Обозначим начальное давление в сосуде  $P_0$ . Конечное давление в сосуде  $P_k$  найдём, записав равенство давлению внутри и снаружи стакана на глубине  $h$ :

$$P_A + \rho g h = P_k. \quad (2) \quad (3 \text{ б.})$$

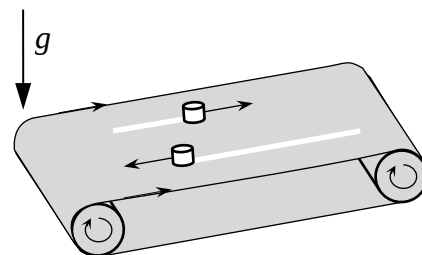
Запишем закон Бойля – Мариотта:

$$P_0 H S = P_k S (H - \Delta h). \quad (3) \quad (2 \text{ б.})$$

Подставляя (1) в (2), а затем (2) в (3) и выражая  $P_0$ , получим

$$\text{ответ: } P_0 = \left( P_A + \frac{mg}{S} \right) \left( 1 - \frac{\Delta h}{H} \right). \quad (2 \text{ б.})$$

3. Два кусочка мела запустили по движущейся ленте транспортера, придав им одинаковую начальную скорость относительно неподвижного наблюдателя. При этом первый кусочек запустили по направлению движения ленты, а второй — против. Когда мелки остановились на ленте, оказалось, что след, прочерченный вторым мелком в  $N$  раз длиннее, чем след, оставленный первым. Во сколько раз скорость, сообщаемая мелкам, больше по величине скорости ленты?



**Решение.**

Пусть  $u$  — скорость ленты, а  $v$  — начальная скорость мелков относительно неподвижного наблюдателя. В системе отсчёта движущейся ленты начальные скорости первого и второго мелков равны  $v - u$  и  $v + u$ , соответственно. (2 б.)

За счёт силы трения мелки движутся равнозамедленно с одинаковым ускорением  $a$  (ускорения одинаковые, т.к. одинаковые коэффициенты трения мелков о ленту). (2 б.)

Мелки скользят по ленте, прочерчивая на ней след до тех пор, пока их скорость относительно ленты не станет равной нулю. Пути, пройденные первым и вторым мелом относительно ленты транспортёра, равны соответственно:

$$L_1 = \frac{(v - u)^2}{2a}, \quad (2 \text{ б.})$$

$$L_2 = \frac{(v + u)^2}{2a}. \quad (2 \text{ б.})$$

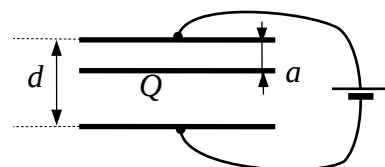
Учитывая, что, по условию, след  $L_2$ , прочерченный вторым мелком в  $N$  раз длиннее, чем след  $L_1$ , оставленный первым, запишем:

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{(v + u)^2}{(v - u)^2} = N.$$

Выразив отсюда искомое отношение скоростей, получим

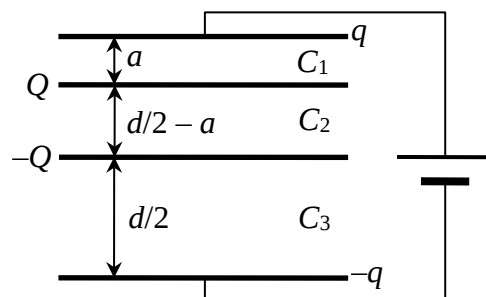
$$\text{ответ: } \frac{v}{u} = \frac{\sqrt{N} + 1}{\sqrt{N} - 1}. \quad (2 \text{ б.})$$

4. Плоский воздушный конденсатор, расстояние между пластинами которого равно  $d$ , подключен к источнику напряжения. Заряд конденсатора равен  $q_0$ . Внутри конденсатора параллельно его обкладкам, на расстоянии  $a$  ( $a < d$ ) от одной из них вставили тонкую пластинку, равномерно заряженную зарядом  $Q$ . Определите заряд конденсатора  $q$  после вставки пластины.



### Решение.

Помимо перераспределения заряда между обкладками конденсатора, вставление заряженной пластины приведёт (в силу закона сохранения заряда) к тому, что полный заряд системы станет ненулевым и равным  $Q$ . Чтобы привести получившуюся систему к обычной схеме с нулевым полным зарядом, внесём дополнительную пластину с зарядом  $-Q$  в центр конденсатора, убедившись, что это не приведёт к дополнительному перераспределению заряда. Действительно, дополнительный перенос заряда с одной обкладки конденсатора на другую привёл бы к изменению напряжения между обкладками, которое необходимо чем-то скомпенсировать, так как напряжение между обкладками неизменно и равно ЭДС батареи. Между тем, дополнительная пластина, в



силу симметрии, не создаёт разности потенциалов (напряжения) между расположенными симметрично относительно неё обкладками конденсатора, а значит и не приведёт к дополнительному перераспределению заряда.

Эквивалентная схема получившейся системы из трёх последовательно соединённых конденсаторов показана на рисунке. Заряды на пластинах каждого из конденсаторов противоположны по знаку, при этом сумма зарядов на нижней пластине верхнего конденсатора ( $C_1$ ) и верхней пластине среднего конденсатора ( $C_2$ ) равна  $Q$ . Следовательно, заряд среднего конденсатора равен  $Q + q$ . Ёмкость исходного конденсатора  $C_0 = \epsilon_0 S/d$  (где  $S$  — площадь пластин,  $d$  — расстояние между ними), а ёмкости трёх получившихся равны

$$C_1 = \epsilon_0 \frac{S}{a}, \quad C_2 = \epsilon_0 \frac{S}{\frac{d}{2} - a}, \quad C_3 = \epsilon_0 \frac{S}{\frac{d}{2}}. \quad (3.6.)$$

Учитывая, что напряжения на конденсаторах выражаются формулой  $U = q/C$ , запишем условие равенства напряжений между внешними пластинами до и после вставки внутрь заряженных пластин (эти напряжения в обоих случаях равны ЭДС батареи):  $q_0/C_0 = q/C_1 + (Q + q)/C_2 + q/C_3$ . Подставив сюда полученные выше выражения для ёмкостей, получим:

$$q_0 d = qa + (Q + q) \left( \frac{d}{2} - a \right) + q \frac{d}{2}. \quad (5.6.)$$

Общий множитель  $1/\epsilon_0 S$  в последнем равенстве сокращён.

Выразив отсюда  $q$ , получим

$$\text{ответ: } q = q_0 - \left( \frac{1}{2} - \frac{a}{d} \right) Q \quad (2.6.)$$